4.1 ΠΟΛΩΟΝΥΜΑ

Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 131 – 132

Α΄ Ομάδας

1.

Ποιες από τις παρακάτω παραστάσεις είναι πολυώνυμα του x :

i) $1-x^3$ **ii)** $\alpha^3-3\alpha^2x+3\alpha x^2-x^3$

iii) $x+\frac{1}{x}$ **iv)** $x^4-2x^{\frac{1}{3}}+4x-1$

Λύση

Πολυώνυμα του x είναι οι παραστάσεις $1-x^3$, $\alpha^3-3\alpha^2x+3\alpha x^2-x^3$

2.

Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = x^2-5x+2$ και $Q(x) = x^3+3x+1$. Να βρεθούν τα πολυώνυμα:

i) $P(x) + Q(x)$ **ii)** $2P(x) - 3Q(x)$ **iii)** $P(x) .Q(x)$ **iv)** $\left[P(x)\right]^2$

Λύση

i)

$P(x) + Q(x) = x^2-5x+2 + x^3+3x+1 = x^3+x^2-2x+3$

ii)

$$\begin{aligned} 2P(x) - 3Q(x) &= 2(x^2-5x+2)-3(x^3+3x+1) \\ &= 2x^2-10x+4-3x^3-9x-3 \\ &= -3x^3+2x^2-19x+1 \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} P(x) .Q(x) &= (x^2-5x+2)(x^3+3x+1) \\ &= x^5+3x^3+x^2-5x^4-15x^2-5x+2x^3+6x+2 \\ &= x^5-5x^4+5x^3-14x^2+x+2 \end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned} \left[P(x)\right]^2 &= (x^2-5x+2)^2 \\ &= x^4+25x^2+4-10x^3-20x+4x^2 \\ &= x^4-10x^3+29x^2-20x+4 \end{aligned}$$

3.
Να βρείτε για ποιες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$, το πολυώνυμο

$$P(x) = (4\mu^3 - \mu)x^3 + 4(\mu^2 - \frac{1}{4})x - 2\mu + 1$$

είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

Λύση

Πρέπει: $4\mu^3 - \mu = 0$ και $\mu^2 - \frac{1}{4} = 0$ και $-2\mu + 1 = 0$

$$4\mu^3 - \mu = 0 \Leftrightarrow \mu(4\mu^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\mu = 0 \text{ ή } 4\mu^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\mu = 0 \text{ ή } \mu^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$
$$\mu = 0 \text{ ή } \mu = \frac{1}{2} \text{ ή } \mu = -\frac{1}{2} \quad \textbf{(1)}$$

$$\mu^2 - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \mu^2 = \frac{1}{4}$$
$$\mu = \frac{1}{2} \text{ ή } \mu = -\frac{1}{2} \quad \textbf{(2)}$$

$$-2\mu + 1 = 0 \Leftrightarrow -2\mu = -1$$
$$\mu = \frac{1}{2} \quad \textbf{(3)}$$

Οι (1), (2), (3) συναληθεύουν για $\mu = \frac{1}{2}$

4.
Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, τα πολυώνυμα
$P(x) = (\alpha^2 - 3\alpha)x^3 + x^2 + \alpha$ και $Q(x) = -2x^3 + \alpha^2 x^2 + (\alpha^3 - 1)x + 1$ είναι ίσα.

Λύση

Πρέπει: $\alpha^2 - 3\alpha = -2$ και $1 = \alpha^2$ και $0 = \alpha^3 - 1$ και $\alpha = 1$

Η μοναδική τιμή $\alpha = 1$ επαληθεύει τις άλλες τρεις εξισώσεις, άρα είναι η ζητούμενη.

5.i)
Να εξετάσετε ποιοι από τους αριθμούς που δίνονται, είναι ρίζες του πολυωνύμου
$P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x + 7$, $x = -1$, $x = 1$
Λύση
$P(-1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 + 2.(-1) + 7 = -2 - 3 - 2 + 7 = 0$.
Άρα ο αριθμός -1 είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$.

$P(1) = 2\cdot 1 - 3\cdot 1 + 2\cdot 1 + 7 = 2 - 3 + 2 + 7 = 8 \neq 0$
Άρα ο αριθμός 1 δεν είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$.

5.ii)
Να εξετάσετε ποιοι από τους αριθμούς που δίνονται, είναι ρίζες του πολυωνύμου
$Q(x) = -x^4 + 1$, $x = -1$, $x = 1$, $x = 3$
Λύση
$Q(-1) = -(-1)^4 + 1 = -1 + 1 = 0$
Άρα ο αριθμός -1 είναι ρίζα του πολυωνύμου $Q(x)$.

$Q(1) = -1 + 1 = 0$
Άρα ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου $Q(x)$.

$Q(3) = -3^4 + 1 = -81 + 1 = -80 \neq 0$
Άρα ο αριθμός 3 δεν είναι ρίζα του πολυωνύμου $Q(x)$.

6.
Να βρείτε για ποιες τιμές του $k \in \mathbb{R}$, το 2 είναι ρίζα του πολυωνύμου
$$P(x) = x^3 - kx^2 + 5x + k$$
Λύση
Το 2 είναι ρίζα του $P(x)$ $\Leftrightarrow$ $P(2) = 0$
$$2^3 - k2^2 + 5\cdot 2 + k = 0$$
$$8 - 4k + 10 + k = 0$$
$$-3k = -18$$
$$k = 6$$

7.

Για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, η τιμή του πολυωνύμου $P(x) = 5x^2 + 3\alpha x + \alpha^2 - 2$ για $x = -1$ είναι ίση με 1.

Λύση

$P(-1) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 5(-1)^2 + 3\alpha(-1) + \alpha^2 - 2 = 1$

$5 - 3\alpha + \alpha^2 - 3 = 0$

$\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0$

$\Delta = 9 - 8 = 1, \qquad \alpha = \dfrac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \dfrac{3 \pm 1}{2} = 2$ ή 1

Β΄ Ομάδας

1.

Να βρείτε τους πραγματικούς α, β, γ, για τους οποίους το πολυώνυμο $f(x) = 3x^2 - 7x + 5$ παίρνει τη μορφή $f(x) = \alpha x(x+1) + \beta x + \gamma$

Λύση

$f(x) = \alpha x(x+1) + \beta x + \gamma = \alpha x^2 + \alpha x + \beta x + \gamma = \alpha x^2 + (\alpha + \beta)x + \gamma$

Πολυώνυμο $\alpha x^2 + (\alpha+\beta)x + \gamma$ = πολυώνυμο $3x^2 - 7x + 5 \quad \Leftrightarrow$

$\alpha = 3$ και $\alpha + \beta = -7$ και $\gamma = 5$

$\alpha = 3$ και $3 + \beta = -7$ και $\gamma = 5$

$\alpha = 3$ και $\beta = -10$ και $\gamma = 5$

2.

Να βρείτε τους πραγματικούς α, β, γ, για τους οποίους το πολυώνυμο $P(x) = 3x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 6$ έχει ρίζες το -2 και το 3.

Λύση

Το -2 ρίζα του $P(x)$ $\Leftrightarrow$

$P(-2) = 0$

$3(-2)^3 + \alpha(-2)^2 + \beta(-2) - 6 = 0$

$3(-8) + \alpha \cdot 4 - 2\beta - 6 = 0$

$-24 + 4\alpha - 2\beta - 6 = 0$

$4\alpha - 2\beta = 30$

$2\alpha - \beta = 15$ **(1)**

Το 3 ρίζα του $P(x)$

$P(3) = 0$

$3 \cdot 3^3 + \alpha \cdot 3^2 + \beta \cdot 3 - 6 = 0$

$81 + 9\alpha + 3\beta - 6 = 0$

$9\alpha + 3\beta = -75$

$3\alpha + \beta = -25$ **(2)**

Σύστημα των (1), (2) : $\begin{cases} 2\alpha - \beta = 15 \\ 3\alpha + \beta = -25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 2\alpha - 15 \\ 3\alpha + 2\alpha - 15 = -25 \end{cases}$

$\begin{cases} \beta = 2\alpha - 15 \\ 5\alpha = -10 \end{cases}$

$\begin{cases} \beta = 2\alpha - 15 \\ \alpha = -2 \end{cases}$

$\begin{cases} \beta = 2(-2) - 15 \\ \alpha = -2 \end{cases}$

$\begin{cases} \beta = -4 - 15 \\ \alpha = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -19 \\ \alpha = -2 \end{cases}$

3.

Να βρείτε τους πραγματικούς λ και μ, για τους οποίους το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \lambda x^2 + \mu x + 6$ έχει ρίζα το 1 και ισχύει $P(-2) = -12$.

Λύση

Το $P(x)$ έχει ρίζα το $1 \Leftrightarrow P(1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\cdot 1^3 + \lambda \cdot 1^2 + \mu \cdot 1 + 6 = 0$

$$2 + \lambda + \mu + 6 = 0$$

$$\lambda + \mu = -8 \qquad \textbf{(1)}$$

$P(-2) = -12 \quad \Leftrightarrow \quad 2(-2)^3 + \lambda(-2)^2 + \mu(-2) + 6 = -12$

$$2(-8) + \lambda \cdot 4 - 2\mu + 6 = -12$$

$$-16 + 4\lambda - 2\mu + 6 = -12$$

$$4\lambda - 2\mu = -2$$

$$2\lambda - \mu = -1 \qquad \textbf{(2)}$$

Σύστημα των (1), (2) : $\begin{cases} \lambda + \mu = -8 \\ 2\lambda - \mu = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = -8 \\ \mu = 2\lambda + 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} \lambda + 2\lambda + 1 = -8 \\ \mu = 2\lambda + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\lambda = -9 \\ \mu = 2\lambda + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = -3 \\ \mu = 2\lambda + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = -3 \\ \mu = 2(-3) + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -3 \\ \mu = -5 \end{cases}$$

4.

Να βρείτε το βαθμό του πολυωνύμου $P(x) = (9\lambda^3 - 4\lambda)x^3 + (9\lambda^2 - 4)x - 3\lambda + 2$, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Λύση

α) Όταν $9\lambda^3 - 4\lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda(9\lambda^2 - 4) \neq 0$

$$\lambda(3\lambda - 2)(3\lambda + 2) \neq 0$$

$$\lambda \neq 0 \quad \text{και} \quad 3\lambda - 2 \neq 0 \quad \text{και} \quad 3\lambda + 2 \neq 0$$

$$\lambda \neq 0 \quad \text{και} \quad 3\lambda \neq 2 \quad \text{και} \quad 3\lambda \neq -2$$

$$\lambda \neq 0 \quad \text{και} \quad \lambda \neq \frac{2}{3} \quad \text{και} \quad \lambda \neq -\frac{2}{3}$$

τότε ο βαθμός του $P(x)$ είναι 3.

β) Όταν $9\lambda^3 - 4\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(9\lambda^2 - 4) = 0$

$$\lambda(3\lambda - 2)(3\lambda + 2) = 0$$

$$\lambda = 0 \quad \text{ή} \quad 3\lambda - 2 = 0 \quad \text{ή} \quad 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda = 0 \quad \text{ή} \quad 3\lambda = 2 \quad \text{ή} \quad 3\lambda = -2$$

$$\lambda = 0 \quad \text{ή} \quad \lambda = \frac{2}{3} \quad \text{ή} \quad \lambda = -\frac{2}{3}$$

β$_1$) Για $\lambda = 0$, $P(x) = -4x + 2$ οπότε ο βαθμός του $P(x)$ είναι 1

β$_2$) Για $\lambda = \frac{2}{3}$, $P(x) = 0 \cdot x + 0 \cdot x + 0 = 0$ μηδενικό πολυώνυμο, που δεν έχει βαθμό

β$_3$) Για $\lambda = -\frac{2}{3}$, $P(x) = 0 \cdot x + 0 \cdot x - 3\left(-\frac{2}{3}\right) + 2 = 2 + 2 = 4$ σταθερό πολυώνυμο, άρα έχει βαθμό 0.

5.

Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$, για το οποίο ισχύει

$$\left(2x+1\right)P(x) = 2x^3 - 9x^2 - 3x + 1$$

Λύση

Το γινόμενο $\left(2x+1\right)P(x)$ είναι πολυώνυμο σα γινόμενο δύο πολυωνύμων και ο βαθμός του είναι 3, αφού ισούται με το πολυώνυμο $2x^3 - 9x^2 - 3x + 1$.
Άρα ο βαθμός του $P(x)$ είναι 2.
Επομένως $P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha \neq 0$

$$\left(2x+1\right)P(x) = 2x^3 - 9x^2 - 3x + 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(2x+1\right)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) = 2x^3 - 9x^2 - 3x + 1$$

$$2\alpha x^3 + 2\beta x^2 + 2\gamma x + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 2x^3 - 9x^2 - 3x + 1$$

$$2\alpha x^3 + (2\beta + \alpha)x^2 + (2\gamma + \beta)x + \gamma = 2x^3 - 9x^2 - 3x + 1$$

$2\alpha = 2$ και $2\beta + \alpha = -9$ και $2\gamma + \beta = -3$ και $\gamma = 1$

$\alpha = 1$ και $2\beta + 1 = -9$ και $2.\,1 + \beta = -3$ και $\gamma = 1$

$2\beta = -10$ $\quad$ $\beta = -5$

$\beta = -5$

Άρα $P(x) = x^2 - 5x + 1$